BOLETÍN

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES

DE BARCELONA.

TERCERA ÉPOCA.

Año I. *Octubre de 1892.* Vol. I.

GENERALIZACIÓN DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

POR

D. LAURO CLARIANA RICART.

Al estudiar los polinomios de Legendre, comprendimos que podía generalizarse la función que dá origen á los mismos, y afortunadamente encontramos otros muy notables que bien pueden procurar nuevos puntos de vista para el análisis.

En toda esta serie de polinomios, se encuentran leyes de parentesco que los unen, dando carácter y fisonomía propio á todos ellos.

Para mayor claridad partiremos del estudio conocido de los polinomios de Legendre, para entrar luego en los que nos atrevemos á designar bajo el nombre de *Laureanos*, como generalización de los primeros.

SECCIÓN 1.ª

1.—Estudio y propiedades de la funcion X_n.

Sea (1) $u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots$;

en esta función se supone $x < 1$, hallándose z, comprendida entre o y 1; el coeficiente X_n es función de x, y constituye el término general de los polinomios de Legendre.

Múltiples y variadas son las consecuencias que caben deducirse entre las funciones precitadas, siendo las mas notables las que á continuación se expresan:

1.ª Consecuencia.—La función u satisface á las dos ecuaciones diferenciales:

$$(2) \quad \left(\frac{d\,u}{d\,x} + \frac{d\,u}{d\,z}\right)\frac{1}{u^3} = u\,x \; ;$$

$$(3) \quad \frac{d\,u}{d\,x}\left(x - z\right) = z\,\frac{d\,u}{d\,z} \; .$$

En efecto, derivando (1) segun x ó z, se obtiene:

$$(a) \quad \frac{d\,u}{d\,x} = \left(1 - 2\,x\,z + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} z = u^3\,z \; ;$$

$$(b) \quad \frac{d\,u}{d\,z} = \left(1 - 2\,x\,z + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(x - z\right) = u^3\left(x - z\right).$$

Sumando sencillamente estas dos igualdades, resulta la igualdad (2).

Si se multiplica luego (a), por $x - z$, y la (b), por x, después de restar dichas dos ecuaciones, se obtiene la (3).

2.ª Consecuencia.—Entre las funciones X y sus derivadas puede establecerse la igualdad siguiente.

$$(4) \quad \left(n+1\right) X_{n+1} - \left(2\,n+1\right) x\,X_n + \left(n-1\right) X_{n-1}$$

$$+ \frac{d\,X_n}{d\,x} - 2\,x\,\frac{d\,X_{n-1}}{d\,x} + \frac{d\,X_{n-2}}{d\,x} = o.$$

En efecto, en la ecuación (2), se puede reemplazar $\frac{1}{u^2}$, por $(1 - 2\,x\,z + z^2)$, y sus derivadas por los desarrollos correspondientes á lá série $X_o + X_1\,z + \ldots$, é igualando luego los coeficientes en z^n, se tiene:

$$\left[\left(\frac{d\,X_o}{d\,x} + \frac{d\,X_1}{d\,x}\,z + \ldots\right) + \left(X_1 + 2\,X_2\,z + \ldots\right)\right] \times \left(1 - 2\,x\,z + z^2\right) =$$

$$\left(X_0 + X_1\,z + X_2\,z^2 + \ldots\right) x;$$

de donde se deduce inmediatamente la ecuación (4).

3.ª Consecuencia.—Dos funciones consecutivas están unidas por la igualdad.

$$(5) \quad n\,X_n = x\,\frac{d\,X_n}{d\,x} - \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}.$$

Para deducir esta consecuencia basta tomar la ecuación (3), ó sea:

$$\frac{d\,u}{d\,x}\left(x - z\right) = z\,\frac{d\,u}{d\,z}.$$

Sustituyendo valores como en el caso anterior, se obtiene

$$\left(\frac{d\,X_0}{d\,x} + \frac{d\,X_1}{d\,x}z + \frac{d\,X_2}{d\,x}z^2 + \ldots\right)\left(x - z\right) =$$

$$z\left(X_1 + 2\,X_2\,z + 3\,X_3\,z^2 + \ldots\right);$$

luego al igualar los coeficientes en z^n, resulta:

$$\frac{d\,X_n}{d\,x}\,x - \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x} = n\,X_n \quad ;$$

conforme á la fórmula (5).

4.ª Consecuencia.

Relación entre tres funciones consecutivas:

$$\left(2\,n + 1\right)X_n = \frac{d\,X_{n+1}}{d\,x} - \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}.$$

Para demostrar esta igualdad tomaremos la igualdad (4), sustituyendo en vez de $\left(n + 1\right) X_{n+1}$, y $\left(n - 1\right) X_{n-1}$, los valores de (5), ó sea

$$\left(n + 1\right)X_{n+1} = \frac{d\,X_{n+1}}{d\,x}\,x - \frac{d\,X_n}{d\,x}$$

$$\left(n - 1\right)X_{n-1} = \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}\,x - \frac{d\,X_{n-2}}{d\,x},$$

resultando en su virtud:

$$\frac{d\,X_{n+1}}{d\,x}\,x - \frac{d\,X_n}{d\,x} - \left(2\,n + 1\right)x\,X_n + \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}\,x$$

$$- \frac{d\,X_{n-2}}{d\,x} + \frac{d\,X_n}{d\,x} - 2\,x\,\frac{d\,X_{n-1}}{d\,x} + \frac{d\,X_{n-2}}{d\,x} = 0,$$

simplificando

$$(6) \qquad \left(2\,n + 1\right)X_n = \frac{d\,X_{n+1}}{d\,x} - \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}.$$

5.ª Consecuencia.

Si se cambia n en n-2, n-4,... en (6), se obtiene

$$\left(2n-3\right)X_{n-2}=\frac{dX_{n-1}}{dx}-\frac{dX_{n-3}}{dx}$$

$$\left(2n-7\right)X_{n-4}=\frac{dX_{n-3}}{dx}-\frac{dX_{n-5}}{dx},$$

Sumando todas estas igualdades desde (6), se deduce

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}=\left(2n+1\right)X_n+\left(2n-3\right)X_{n-z}$$

$$+\left(2n-7\right)X_{n-4}+\ldots+3X_1.\left(n \text{ impar}\right)$$

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}=\left(2n+1\right)X_n+\left(2n-3\right)X_{n-z}$$

$$+\left(2n-7\right)X_{n-4}+\ldots+5X_2+X_0.\left(n \text{ par}\right).$$

Esto en el concepto de que $\frac{dX_0}{dx}=0$, $\frac{dX_1}{dx}=1=X_0$, cuyos valores se deducen inmediatamente de la función u, y su primera derivada respecto á z, suponiendo luego $z=0$.

Si cambiamos $n+1$ en n, resulta $\frac{dX_n}{dx}=\left(2n-1\right)X_{n-1}+$

$$\left(2n-5\right)X_{n-3}+\ldots$$

Sumando los dos resultados obtenidos, se tiene:

$$\frac{dX_{n+1}}{dx}+\frac{dX_n}{dx}=(2n+1)X_n+(2n-1)X_{n-1}+\ldots 5X_2+3X_1+X_0.$$

6.ª consecuencia.
Relación entre dos funciones consecutivas.

$$(7)\qquad (n+1)X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-x\frac{dX_n}{dx}.$$

Para obtener esta igualdad, basta tomar las (5) y (6), ó sea

$$\frac{dX_n}{dx}x-\frac{dX_{n-1}}{dx}=nX_n,$$

$$(2n+1)X_n=\frac{dX_{n+1}}{dx}-\frac{dX_{n-1}}{dx};$$

las que sumadas dan directamente la expresión (7).

7.ª Consecuencia.

Deducir las igualdades que á continuación se expresan:

$$(8) \qquad X_n = \frac{d\,X_{n+1}}{d\,x} - 2\,x\,\frac{d\,X_n}{d\,x} + \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x}$$

$$(9) \qquad (n+1)\,X_{n+1} - (2\,n+1)\,x\,X_n + n\,X_{n-1} = o \quad .$$

Sumando (5) y (7), ó sea

$$\frac{d\,X_n}{d\,x}\,x - \frac{d\,X_{n-1}}{d\,x} = n\,X_n$$

$$(n+1)\,X_n = \frac{d\,X_{n+1}}{d\,x} - x\,\frac{d\,X_n}{d\,x}\,,$$

resulta inmediatamente la igualdad (8).

Para demostrar la (9), tomaremos la (4), ó sea

$$(n+1)\,X_{n+1} - (2\,n+1)\,x\,X_n + (n-1)\,X_{n-1}$$

$$+ \frac{d\,X_n}{d\,x} - 2\,x\,\frac{d\,X_{n-1}}{d\,x} + \frac{d\,X_{n-2}}{d\,x} = o,$$

en el supuesto de expresar los tres últimos términos por X_{n-1} según se desprende de (8), luego:

$$(n+1)\,X_{n+1} - (2\,n+1)\,x\,X_n + n\,X_{n-1} = o.$$

Según la fórmula (9) pueden deducirse particularmente los polinomios de Legendre con solo saber que $X_o = 1$, y $X_1 = x$, conforme á los valores de u y su primera derivada respecto á z, cuando $z = o$,

Así pues, se tiene

$$X_2 = \frac{3}{2}\,x\,X_1 - \frac{1}{2}\,X_0 = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}$$

$$X_3 = \frac{5}{3}\,x\,X_2 - \frac{2}{3}\,X_1 = \frac{5}{2}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x$$

$$X_4 = \frac{7}{4}\,x\,X_3 - \frac{3}{4}\,X_2 = \frac{5}{2}\,\frac{7}{4}\,x^4 - \frac{3}{2}\,\frac{5}{4}\,2\,x^2 + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}$$

$$X_5 = \frac{9}{5}\,x\,X_4 - \frac{4}{5}\,X_3 = \frac{7.9}{2.4}\,x^5 - \frac{5.7}{2.4}\,2\,x^3 + \frac{3.5}{2.4}\,x$$

$$= \frac{1.3.5.7.9}{1.2.3.4.5}\,x^5 - \frac{1.3.5.7}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1.3.5}{1}\,\frac{1}{2.4}\,x \quad .$$

Y en general

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} x^n - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-2)} \frac{1}{2} x^{n-2}$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{1.2.3\ldots(n-4)} \frac{1}{2.4} x^{n-4} + \ldots ;$$

ó también

$$X_{n+1} = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)} x^{n+1} - \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{1}{2} x^{n-1} + \ldots$$

—Síntesis.

La función X_n es entera y del grado n en x.

Todos sus términos son de la misma paridad que n, y alternativamente positivos y negativos.

Cuando $x = 1$, todos los polimonios de Legendre, se reducen á la unidad.

2.—*Formas de la función X_n.*

FORMA DE LEGENDRE.

Sea $u = (1 - 2zx + z^2)^{-\frac{1}{2}} = Xo + X_1 z + \ldots$

Esta expresión cabe desarrollarla del modo siguiente:

$$n = [1 - z(2x - z)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z(2x - z) + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4} z^2 (2x - z)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} z^n (2x - z)^n + \ldots$$

Tomando la suma de valores que corresponden á z^n, tendremos la expresión de X_n, ó sea

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots.. n} x^n - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{1.2.3\ldots(n-2)} \frac{1}{2} x^{n-2}$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{1.2.3\ldots(n-4)} \frac{1}{2.4} x^{n-4} + \ldots$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!} \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right\}.$$

FORMA DE RODRIGUES.

Si el coeficiente $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}$, se modifica multiplicando ambos términos por $2.4.6.\ldots 2n = 2.^n\, n!$ resulta:

$$\frac{2n\ldots 5.\,4.\,3.\,2.\,1}{2^n\, n!\, n!} = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n n!}.$$

Al fijarnos con la ley que se descubre en el desarrollo de X_n según la fórmula de Legendre, el término general de $2^n\, n!\, X_n$, podrá escribirse del modo siguiente:

$$(-1)^m\, 2n(2n-1)\ldots(n+1)\times$$

$$\times \frac{n(n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)} x^{n-2m}$$

$$= (-1)^m \frac{2n(2n-2)\ldots(2n-2m+2)}{2.\,4.\,6\ldots 2m}\times$$

$$(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)x^{n-2m} =$$

$$= (-1)^m \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\times$$

$$(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m}$$

Ahora bien,

$$(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\,x^{n-2m} = d^n \frac{x^{2n-2m}}{d\,x^n}$$

El término general $2^n\, n!\, X_n$, toma pues la forma

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\left[(-1)^m \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!} x^{2n-2m}\right] \quad ;$$

$$\text{luego}\quad X_n = \frac{1}{2^n\, n!}\, d^n \frac{(x^2-1)^n}{d\,x^n}.$$

MÉTODO DE JACOBI.

$$\text{Sea}\quad y = x + \frac{z}{2}(y^2-1),\ (1)\ \text{ de donde}$$

$$y = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sqrt{1-2xz+z^2}\quad ,\ \text{luego}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}\quad ,\ (2)$$

Si se aplica á (1) la fórmula de Lagrange, se tiene:

$$y = x + \frac{z}{2}(x^2 - 1) + \frac{z^2}{1.2}\frac{1}{2^2}\frac{d}{dx}(x^2 - 1) + \ldots$$

$$\frac{z^n}{n!}\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots$$

y por consiguiente derivando resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{z}{2}\frac{d(x^2-1)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + \ldots$$

Si recordamos que $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1 z + \ldots$ en virtud de (2), se deduce

$$X_n = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n};$$

cuya fórmula es la misma que la de Rodrigues.

3. —*Polinomios de Legendre en forma de integral.*

Considerando la función $u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en el supuesto de estar la x comprendida entre -1 y $+1$, se podrá igualar á $\cos\varphi$, de donde

$$u = (1 - 2\cos\varphi \,.\, z + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z\cos\varphi)^2 + z^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Antes de pasar adelante, demostraremos que:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dw}{a - b\sqrt{-1}\cos w}.$$

En efecto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dw}{a - b\sqrt{-1}\cos w} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a + b\sqrt{-1}\cos w}{a^2 + b^2\cos^2 w}dw.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,dw}{a^2 + b^2\cos^2 w} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b\sqrt{-1}\cos w}{a^2 + b^2\cos^2 w}dw.$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\,dw}{a^2+b^2\cos^2 w}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\sec^2 w\,dw}{b^2+a^2\sec^2 w}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a\sec^2 w\,dw}{a^2+b^2+a^2\,tg^2 w}=$$

$$=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a\,d\,tg\,w}{a^2+b^2+a^2\,tg^2 w}=$$

$$=\frac{4}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\infty}\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,dtg\,w}{\frac{a^2}{a^2+b^2}\,tg^2 w+1}=$$

$$=\frac{4}{2\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(arc.tg\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,tg\,w\right)_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Respecto á la segunda integral

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{b\sqrt{-1}\cos w\,d\,w}{a^2+b^2\cos^2 w}$, se podrá escribir $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{b\sqrt{-1}\cos w\,dw}{a^2+b^2\cos^2 w}=$

$\displaystyle=2\int_0^{\pi}\frac{b\sqrt{-1}\cos w\,dw}{a^2+b^2\cos^2 w}=o$, supuesto que debe verificarse la igualdad

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos w\,dw}{a^2+b^2\cos^2 w}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos w\,dw}{a^2+b^2\cos^2 w}.$$

Así pues en definitiva se tiene;

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,w}{a-b\sqrt{-1}\cos w}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Al aplicar esta fórmula en el caso particular que nos ocupa, resulta

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,w}{1-z\cos\varphi-z\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{-1}\cos w}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\,w}{1-z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos w)}.$$

Efectuando la division

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dw\Big\{1+z(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos w)+$$

$$\ldots+z^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos w)^n+\ldots\Big\};$$

luego

$$X_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ \varphi \cos w)^n\, dw;$$

ó bien

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{-1}\ \sqrt{1-x^2}\ \cos w)^n\, dw;$$

esta fórmula nos da los polinomios de Legendre en función de integrales definidos, conforme nos habíamos propuesto determinar.

SECCIÓN 2.ª

Funciones Laureanas. análogas á las X_n de Legendre.

1.—Estudio de la funcion L', ó sea

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3}} = (1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

Derivando según z, resulta:

$$\frac{du}{dz} = (1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{4}{3}}(x^2 - 2xz + z^2);$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 4(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{7}{3}}(x^2 - 2xz + z^2)^2$$

$$-2(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{4}{3}}(x - z)$$

$$\frac{d^3u}{dz^3} = 28(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{10}{3}}(x^2 - 2xz + z^2)^3$$

$$-16(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{7}{3}}(x - z)(x^2 - 2xz + z^2)$$

$$-8(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{7}{3}}(x^2 - 2xz + z^2)(x - z)$$

$$+2(1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{4}{3}}$$

. . . .

Ahora bien, según el teorema de Maclaurin, se tiene

$$u = u_0 + \left(\frac{d\,u}{d\,z}\right)_0 z + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\,u}{d\,z^2}\right)_0 z^2 + \ldots$$

Los valores u_0, $\left(\frac{d\,u}{d\,z}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\,u}{d\,z^2}\right)_0 \ldots$

constituyen las funciones Laureanas, que en este caso designaremos por L_0', L_1', L_2'....., y que son polinomios enteros en x, análogos á los X_n de Legendre.

Determinemos una fórmula que facilite hallar, dadas las primeras funciones, las que siguen á éstas.

Considerando otra vez la función

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3}} \quad ; (1)$$

cabe escribir

$$u = 1 + L_1'\,r + L_2'\,z^2 + \ldots \quad (2)$$

Derivando (1) y (2) según z, se tiene

$$\frac{x^2 - 2\,x\,z + z^2}{(1 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3)^{\frac{4}{3}}} = L_1' + 2\,L_2'\,z + \ldots$$

Luego

$$(x^2 - 2\,x\,z + z^2) = (1 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3)^{\frac{4}{3}}\,(L_1' + 2\,L_2'\,z + \ldots).$$

Igualando los coeficientes de z^m, se obtiene

$$x^2\,L'_m - 2\,x\,L'_{m-1} + L'_{m-2} = 3\,x\,(m-1)\,L'_{m-1}$$
$$- 3\,x^2\,m\,L'_m + (m+1)\,L'_{m+1} - (m-2)\,L'_{m-2}.$$

De donde

$$L'_{m+1} = \frac{L_m\,x^2\,(1 + 3\,m) - x\,(3\,m - 1)\,L'_{m-1} + (m-1)\,L'_{m-2}}{m+1}.$$

Suponiendo $m + 1 = n$, se deduce

$$\text{(a)} \quad L'_n = \frac{3\,n - 2}{n}\,x^2\,L'_{n-1} - \frac{3\,n - 4}{n}\,x\,L'_{n-2} + \frac{n-2}{n}\,L'_{n-3}.$$

Esta fórmula se relaciona con la que hemos hallado ya al tratar de los polinomios de Legendre, y que se expresa por

$$P_n = \frac{2\,n - 1}{n}\,x\,P_{n-1} - \frac{n-1}{n}\,P_{n-2} \quad .$$

De la fórmula (a) pueden deducirse los valores siguientes, cambiando n en $n-1$, $n-2$, &.

Así pues

$$L'_{n-1} = \frac{3n-5}{n-1} x^2 L'_{n-2} - \frac{3n-7}{n-1} x L'_{n-3} + \frac{n-3}{n-1} L'_{n-4}$$

$$L'_{n-2} = \frac{3n-8}{n-2} x^2 L'_{n-3} - \frac{3n-10}{n-2} x L'_{n-4} + \frac{n-4}{n-2} L'_{n-5}$$

$$L'_{n-3} = \frac{3n-7}{n-3} x^2 L'_{n-4} - \frac{3n-13}{n-3} x L'_{n-5} + \frac{n-5}{n-3} L'_{n-6}$$

$$L'_{n-4} = \frac{3n-14}{n-4} x^2 L'_{n-5} - \frac{3n-16}{n-4} x L'_{n-6} + \frac{n-6}{n-4} L'_{n-7}$$

$$L'_{n-5} = \frac{3n-17}{n-5} x^2 L'_{n-6} - \frac{3n-19}{n-5} x L'_{n-7} + \frac{n-7}{n-5} L'_{n-8}$$

$$L'_{n-6} = \frac{3n-20}{n-6} x^2 L'_{n-7} - \frac{3n-22}{n-6} x L'_{n-8} + \frac{n-8}{n-6} L'_{n-9}$$

. . . .

Sustituyendo estos valores en L'_n resulta dependiente de tres L' consecutivas cualesquiera.

2.—Consecuencias de la función L'

Sea $$u = (1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^{-\frac{1}{3}} =$$
$$= L'_0 + L'_1 z + L'_2 z^2 + \ldots$$

Derivando según z y x, se tiene

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{3}(\quad)^{-\frac{4}{3}} \times -3(x^2 - 2xz + z^2) =$$
$$= u^4 (x^2 - 2xz + z^2),$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{3}(\quad)^{-\frac{4}{3}} \times -3(2xz - z^2) =$$
$$= u^4 (2xz - z^2),$$ de donde:

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\frac{1}{u^3} = u x^2. \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{du}{dx}(x^2 - 2xz + z^2) = \frac{du}{dz}(2xz - z^2);$$

ó sea

$$\frac{du}{dx}(x-z)^2 = z(2x-z)\frac{du}{dz}. \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo en vez de $\frac{1}{u^3}$ su valor $1 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3$, y en vez de u, y sus derivadas, sus valores, igualando luego los coeficientes de z^n, resulta de (a):

$$(n+1) L'_{n+1} - x^2 (3n+1) L'_n + 3x(n-1) L'_{n-1}$$
$$-(n-2) L'_{n-2} + \frac{d L'_n}{d x} - 3x^2 \frac{d L'_{n-1}}{d x}$$
$$+ 3x \frac{d L'_{n-2}}{d x} - \frac{d L'_{n-3}}{d x} = o.$$

Tomando los valores en (b), se deduce

$$2 x n L'_n - (n-1) L'_{n-1} =$$
$$= x^2 \frac{d L'_n}{d x} - 2x \frac{d L'_{n-1}}{d x} + \frac{d L'_{n-2}}{d x}.$$

3.—Estudio de la funcion L''.

Sea $u = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 4x^3 z + 6x^2 z^2 - 4xz^3 + z^4}} = (\quad)^{-\frac{1}{4}}$.

Derivando, resulta

$$\frac{d u}{d z} = -\frac{1}{4} (\quad)^{-\frac{5}{4}} \times -4 (x^3 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)$$

$$\frac{d^2 u}{d z^2} = \frac{1}{4} \frac{5}{4} (\quad)^{-\frac{9}{4}} \times 16 (x^3 - 3x^2 z + 3xz^2 - z^3)^2$$

$$-\frac{1}{4} (\quad)^{-\frac{5}{4}} \times -4 \times -3 (x^2 - 2xz + z^2)$$

. . . .

Suponiendo $z = o$, se tiene

$$L_o'' = 1, \quad L_1'' = x^3, \; L_2'' = \frac{5}{2} x^6 - \frac{3}{2} x^2$$

$$L_3'' = \frac{45}{6} x^9 - \frac{45}{6} x^5 + x.$$

4.—Consecuencias de la funcion L''.

Considerando otra vez la función bajo la forma de serie

$$u = (\quad)^{-\frac{1}{4}} = L_o'' + L_1'' z + L_2'' z^2 + \ldots$$

Derivando respecto á z, se halla

$$-\frac{1}{4}(\quad)^{-\frac{5}{4}} \times -4\,(x^3 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3) = L_1'' + 2\,L_2''\,z + \ldots$$

de donde

$$(x^3 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3)\,(L_0'' + L_1''\,z + L_2''\,z^2 + \ldots)$$
$$= (\quad)\,(L_1'' + 2\,L_2''\,z + \ldots)$$

Igualando los coeficientes en z^n, resulta:

$$L''_n\,x^3 - 3\,x^2\,L''_{n-1} + 3\,x\,L''_{n-2} - L''_{n-3} =$$
$$\text{(A)} \quad = (n+1)\,L''_{n+1} - 4\,n\,x^3\,L''_n + (n-1)\,6\,x^2\,L''_{n-1} - (n-2)\,4\,x\,L''_{n-2}$$
$$+ (n-3)\,L''_{n-3}.$$

Cambiando $n+1$ en n resulta:

$$L''_{n-1}\,x^3 - 3\,x^2\,L''_{n-2} + 3\,x\,L''_{n-3} - L''_{n-4} =$$
$$= n\,L''_n - 4\,(n-1)\,x^3\,L''_{n-1} + (n-2)\,6\,x^2\,L''_{n-2}$$
$$- (n-3)\,4\,x\,L''_{n-3} + (n-4)\,L''_{n-4};$$

de donde

$$L''_n = \frac{(4\,n-3)\,x^3\,L''_{n-1} - (6\,n-9)\,x^2\,L''_{n-2}}{n}$$
$$\frac{+ (4\,n-9)\,x\,L''_{n-3} - (n-3)\,L''_{n-4}}{n}.$$

5.—Generalización de la función Laureana.

De la fórmula (A) puede deducirse un desarrollo que comprenda todos los grupos, correspondientes á una función general, tal como

$$u = \frac{1}{\left(1 - m\,x^{m-1}\,z + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2}\,x^{m-2}\,z^2 + \ldots + z^m\right)^{\frac{1}{m}}}$$

Al designar por $K = m - 2$, el número de acentos de L, ó unidades enteras segun se desprende de la fórmula (A), se obtiene:

$$L^k_n\,x^{k+1} - (k+1)\,x^k\,L^k_{n-1} + \frac{k+1}{1}\,\frac{k}{2}\,x^{k-1}\,L^k_{n-2} \ldots$$
$$= (n+1)\,L^k_{n+1} - \frac{k+2}{1}\,n\,x^{k+1}\,L^k_n +$$
$$+ \frac{(k+2)\,(k+1)}{1.\,2}\,(n-1)\,x^k\,L^k_{n-1}$$
$$- \frac{(k+2)\,(k+1)\,k}{1.\,2.\,3}\,(n-2)\,x^{k-1}\,L^k_{n-2} + \ldots\,,$$

de donde

$$L^{k}_{n+1} = \frac{x^{k+1}(1+(k+2)\,n)\,L^{k}_{n} - x^{k}\Big\{(k+1) +}{n+1}$$

$$\frac{+\dfrac{(k+1)(k+2)(n-1)}{1.\,2}\Big\}L^{k}_{n-1} + \ldots}{n+1}$$

En virtud de lo que precede podremos dar una tabla de funciones Laureanas, comprendiendo en ellas las de Legendre en el concepto de expresarse por $L^{0}{}_{n} = X_{n}$, y bajo la forma que sigue:

$$\text{(B)}\quad \begin{array}{llllllll}
L^{m}{}_{0} & \{ L^{0}{}_{0} & = & X_{0}, & L'_{0}, & L''_{0}, & L'''_{0}, \ldots & L^{m}{}_{0} \\
L^{m}{}_{1} & \{ L^{0}{}_{1} & = & X_{1}, & L'_{1}, & L''_{1}, & L'''_{1}, \ldots & L^{m}{}_{1} \\
L^{m}{}_{2} & \{ L^{0}{}_{2} & = & X_{2}, & L'_{2}, & L''_{2}, & L'''_{2}, \ldots & L^{m}{}_{2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
L^{m}{}_{m} & \{ L^{0}{}_{m} & = & X_{m}, & L'_{m}, & L''_{m}, & L'''_{m}, \ldots & L^{m}{}_{m}\ .
\end{array}$$

Segun estos preliminares, cabe expresar una función bajo un concepto bien general, pues, en vez de hacerlos dependientes de X_n, que es una parte de la serie indicada por el cuadro (B), pueden entrar los valores de $L_0{}^m$, $L_1{}^m$,... en que cada uno de ellos da lugar á una serie de otras L.

De todo lo dicho se infiere que una función n formada de términos irracionales en x y z, la podremos expresar por otra entera y racional en potencias crecientes de z, cuando dicha función sea de la forma

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3}} + \ldots$$

Así pues podremos escribir

$$\begin{aligned}
u &= L_0{}^m + L_1{}^m\,z + L_2{}^m\,z^2 + \ldots \\
&= (L_0{}^0 + L'_0 + L''_0 + \ldots) + (L_1{}^0 + L_1{}' + L_1{}'' + \ldots)\,z \\
&\quad + (L^0{}_2 + L'_2 + L''_2 + \ldots)\,z^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Por los desarrollos que preceden, sabemos que todas las cantidades que están dentro del paréntesis son polinomios enteros y racionales en x, debiendo oscilar sus valores, según los límites supuestos para x, entre valores finitos.

Ahora bien, al multiplicar ambos miembros por $d\,z$, é integrando, se tiene

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + z^2}} + \int \frac{d\,z}{\sqrt[3]{1 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3}} + \ldots$$

$$= (L^o{}_0 + L'_0 + \ldots)\,z + (L^o{}_1 + L'_1 + \ldots)\frac{z^2}{2} + \ldots$$

Para conservar la convergencia de la serie, conviene limitar los valores de z entre o y 1.

Fácilmente se concibe que en la familia de funciones que venimos estudiando existen dos especies; unas de grado par; otras de grado impar; ambas tienen la misma ley para $x = 1$, pero no resulta lo propio para $x = -1$, pues mientras las de grado par toman los diferentes valores que produce la expresión (-1),^{n} en cambio las de grado impar dan valores que crecen indefinidamente á medida que los acentos de L, aumentan.

6.—Terminaremos este trabajo dando una tabla de los primeros valores de L deducidos de las fórmulas generales correspondientes á $L^o{}_n$, L'_n, L''_n ...

Tabla de valores de L.

Para L^o_n

$$L^o_u = \frac{2\,n - 1}{n}\,x\,L^o_{n-1} - \frac{n - 1}{n}\,L^o_{n-z}$$

$$L^o_0 = 1,\ L^o_1 = x\ ,\ L^o_2 = \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2},\ldots$$

Para L'_n

$$L'_n = \frac{3_{n-2}}{n}\,x^2\,L'_{n-1} - \frac{3_{n-4}}{n}\,x\,L'_{n-2} + \frac{n-2}{n}\,L'_{n-3}\,;$$

$$L'_0 = 1,\ L'_1 = x^2\ ,\ L^1{}_2 = 2\,x^4 - x,\ldots$$

Para L''_n

$$L''_n = \frac{4\,n - 3}{n}\,x^3\,L''_{n-1} - \frac{6\,n - 9}{n}\,x^2\,L''_{n-2}$$

$$+ \frac{4\,n - 9}{n}\,x\,L''_{n-3} - \frac{n - 3}{n}\,L''_{n-4}\,.$$

$$L''_0 = 1,\ L''_1 = x^3\ ,\ L''_2 = \frac{5}{2}\,x^6 - \frac{3}{2}\,x^2$$

$$L''_3 = \frac{45}{6}\,x^9 - \frac{45}{6}\,x^5 + x\ ,\quad L''_4 = \frac{195}{8}\,x^{12} - \frac{270}{8}\,x^8 + \frac{85}{8}\,x^4 - \frac{1}{4}\,.$$

. . . .

Imprenta de Jaime Jepús, calle del Notariado, número 9.